Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2019 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ

Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов для ЕГЭ по математике 2019 года

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме и уровне сложности.

Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2019 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов — в кодификаторах элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников организаций образования для проведения единого государственного экзамена 2019 г. по математике.

Экзаменационная работа состоит из двух частей, которые различаются по содержанию, сложности и числу заданий. Определяющим признаком каждой части работы является форма заданий:

- часть 1 содержит 11 заданий (задания 1–11) с кратким ответом;
- часть 2 содержит 4 задания (задания 12–15) с кратким ответом и шесть заданий (задания 16–21) с развёрнутым ответом.

По уровню сложности задания распределяются следующим образом: задания 1–11 имеют базовый уровень, задания 12–19 – повышенный уровень, задания 20 и 21 относятся к высокому уровню сложности.

Задания первой части предназначены для определения математических компетентностей выпускников образовательных организаций, реализующих программы среднего (полного) общего образования на базовом уровне.

Задание с кратким ответом (1-15) считается выполненным, если в бланке ответов № 1 зафиксирован верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Задания 16–21 с развёрнутым ответом, в числе которых четыре задания повышенного и два задания высокого уровней сложности, предназначены для более точной дифференциации абитуриентов вузов.

Правильное решение каждого из заданий 1-15 оценивается одним баллом.

Правильное решение каждого из заданий 16 - 17 оценивается- 2 баллами; 18 и 19 — 3 баллами; 20 и 21 —4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 33 балла.

К каждому заданию с развёрнутым ответом, включённому в демонстрационный вариант, предлагается одно из возможных решений. Приведённые критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов, система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 11 заданий базового уровня сложности с кратким ответом.

Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 6 заданий повышенного и высокого уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–15 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

Ответ: *–0,8* . 

При выполнении заданий 16–21 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к заданиям 1–15 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в *БЛАНК ОТВЕТОВ* № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Простейшие задачи

По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 16 руб. Если на счету осталось меньше 16 руб., то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счету было 300 руб. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

Решение.

300/16 = 18,75, но так как 75% от 16 рублей (т. е. 12 рублей) не хватит, чтобы оплатить день общения - делаем вывод, что Лизе этих денег хватит на 18 дней.

Ответ: 18.

2. *Задачи на проценты*

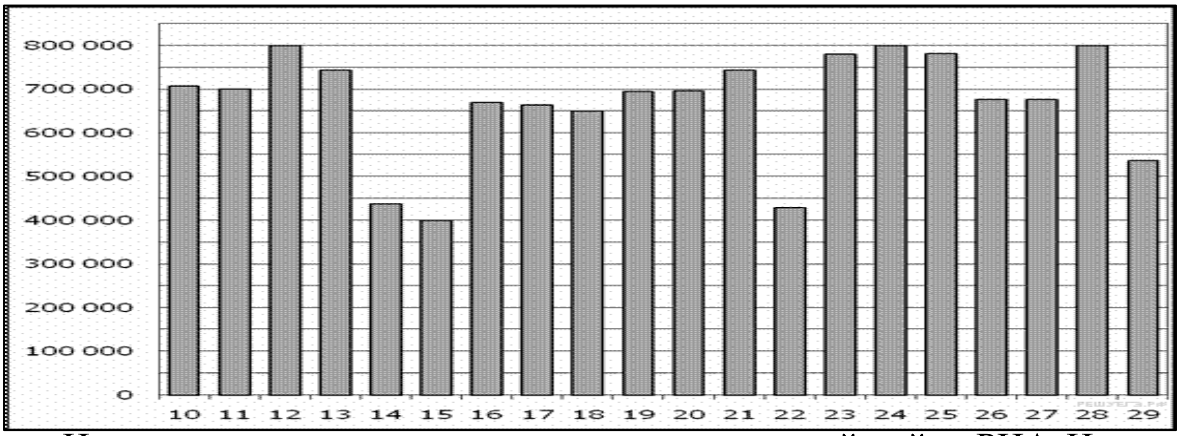
В городе N живет 200 000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых жителей 45% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей работает?

Решение.

Численность детей в городе N составляет 200 000 . 0,15 = 30 000. Численность взрослого населения 200 000 − 30 000 = 170 000 человек. Из них не работает 170 000 . 0,45 = 76 500 человек. Значит, работает 170 000 − 76 500 = 93 500 человек.

Ответ: 93 500.

3. *Чтение графиков и диаграмм*



На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта РИА Новости было наименьшим за указанный период.

Решение.

Из диаграммы видно, что наименьшим количество посетителей было 15 ноября (см. рисунок).

Ответ: 15.

4. *Работа с формулами.*

Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) можно вычислить по формуле $a = \omega^2 R$: где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), а *R* — радиус окружности. Пользуясь этой формулой, найдите расстояние *R* (в метрах), если угловая скорость равна 3 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 45 м/с^2.

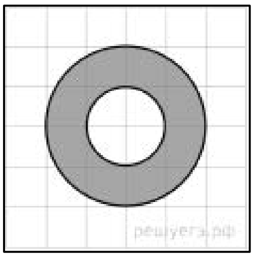
Решение.

Выразим радиус окружности: $R = \frac{a}{\omega^2}$. Подставим значения переменных a и ω :

$$R = \frac{45}{3^2} = \frac{45}{9} = 5.$$

Ответ: 5.

5. *Квадратная решётка, координатная плоскость.*



На клетчатой бумаге нарисованы два круга. Площадь внутреннего круга равна 51. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

Решение.

Площади кругов относятся как квадраты их радиусов. Поскольку радиус большего круга вдвое больше радиуса меньшего круга, площадь большего круга вчетверо больше площади меньшего. Следовательно, она равна 204. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площадей кругов: $204 - 51 = 153$.

Ответ: 153.

6. <u>Начала теории вероятностей</u>

Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Решение.

За первые три дня будет прочитан 51 доклад, на последние два дня планируется 24 доклада. Поэтому на последний день запланировано 12 докладов. Значит, вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции, равна $\frac{12}{75} = 0,16.$

Ответ: 0,16.

<u>7. Простейшие уравнения</u>

Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4} = 4.$

Решение.

Используем формулу $\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$:

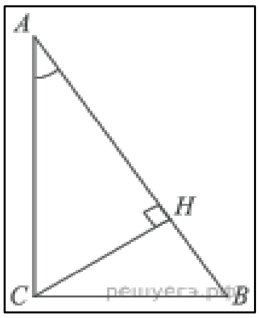
$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \log_{2^3} 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \frac{8x-4}{3} = 4 \Leftrightarrow 8x-4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

Приведем другое решение:

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 8^4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 2^{12} \Leftrightarrow 8x-4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ:2.

<u>8. Планиметрия : задачи , связанные с углами</u>.



В треугольнике ABC **угол** C **равен 90°,** CH **– высота,** $AB = 13$**,** $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$**. Найдите** AH.

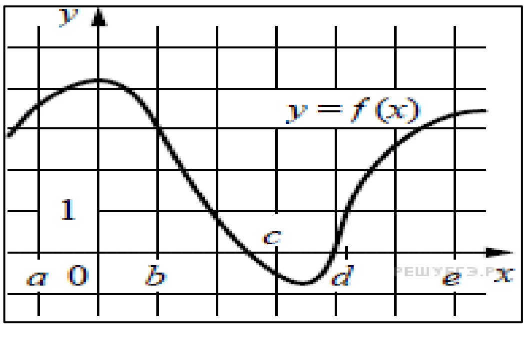
Решение.

Имеем:

$$AH = AC\cos A = AB\cos^2 A = AB \cdot \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 A} = 13 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{25}} = 13 \cdot \frac{25}{26} = 12{,}5.$$

Ответ: 12,5.

<u>9. Анализ графиков и диаграмм.</u>



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$**. Числа** a, b, c, d **и** e **задают на оси** x **четыре интервала.**

Ниже указаны значения производной в данных точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной в ней.

ТОЧКИ	ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
А) (*a*; *b*)	**1) производная отрицательна на всём интервале**
Б) (*b*; *c*)	**2) производная положительна в начале интервала и отрицательна в конце интервала**
В) (*c*; *d*)	**3) функция отрицательна в начале интервала и положительна в конце интервала**
Г) (*d*; *e*)	**4) производная положительна на всём интервале**

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Решение.

Если функция возрастает, то производная положительна и наоборот.

На интервале (a;b) производная положительна вначале интервала и отрицательна в конце, потому что функция вначале возрастает, а потом убывает.

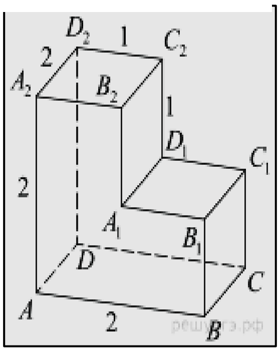
На интервале (b;c) производная отрицательна, потому что функция убывает.

На интервале (c;d) функция отрицательна в начале интервала и положительна в конце интервала.

На интервале (d;e) производная положительна, потому что функция возрастает.

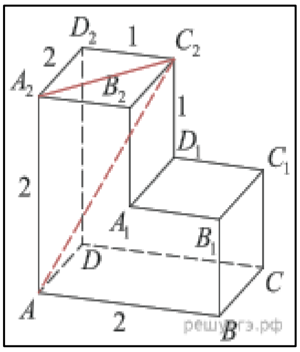
Таким образом, получаем соответствие А — 2, Б — 1, В — 3 и Г — 4.

Ответ*:* 2134.



10. *Стереометрия.*

На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите расстояние между вершинами A и C_2 .



Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник, по теореме Пифагора

$$AC_2 = \sqrt{AA_2{}^2 + A_2C_2{}^2} = \sqrt{AA_2{}^2 + A_2D_2{}^2 + D_2C_2{}^2} = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

Ответ: 3

11. Выбор оптимального варианта

Для транспортировки 45 тонн груза на 1300 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	**3200**	**3,5**
Б	**4100**	**5**
В	**9500**	**12**

Решение.

Рассмотрим все варианты.

Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *А* понадобится 13 автомобилей. Стоимость перевозки каждым из них составит 32 . 1300 = 41 600 руб. Полная стоимость перевозки 41 600 . 13 = 540 800 руб.

Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *Б* понадобится 9 автомобилей. Стоимость перевозки каждым из них составит 41 . 1300 = 53 300 руб. Полная стоимость перевозки 53 300 . 9 = 479 700 руб.

Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *В* понадобится 4 автомобиля. Стоимость перевозки каждым из них составит 95 . 1300 = 123 500 руб. полная стоимость перевозки 123 500 . 4 = 494 000 руб.

Стоимость самой дешевой перевозки составит 479 700 руб.

Ответ: 479 700.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

ЧАСТЬ 2

Ответом на задания 12–15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

12. Вычисления и преобразования

Найдите $\mathrm{tg}^2\,\alpha$**, если** $5\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6.$

Решение.

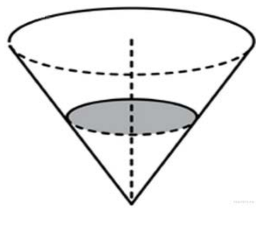
Выполним преобразования:

$$5\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6 \Leftrightarrow 5\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -\sin^2\alpha = -7\cos^2\alpha \Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 7 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2\,\alpha = 7.$$

Ответ: 7.

13. Стереометрия.



В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 0,5 высоты. Объём жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

Решение.

Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем большего конуса в 8 раз больше объема меньшего конуса, он равен 560 мл. Следовательно, необходимо долить 560 − 70 = 490 мл жидкости.

Ответ: 490.

14*. **Наибольшее и наименьшее значение функции.***

Найдите наибольшее значение функции $y = 14x - 7\,\mathrm{tg}\,x - 3{,}5\pi + 11$ **на отрезке** $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

Решение.

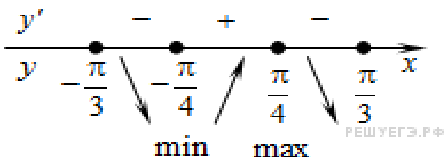
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 14 - 7\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{7(2\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} = \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ -\frac{2\pi}{3} \le 2x \le \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2}, \\ 2x = -\frac{\pi}{2}, \end{array}\right. \\ -\frac{2\pi}{3} \le 2x \le \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4}, \\ x = -\frac{\pi}{4}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



Наибольшим значением функции на заданном отрезке будет наибольшее из чисел $y\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ и $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Найдем их:

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 14\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 7\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} - \frac{7}{2}\pi + 11 = -\frac{59}{6}\pi + 7\sqrt{3} + 11,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 14\cdot\frac{\pi}{4} - 7\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{7}{2}\pi + 11 = 4.$$

Заметим, что $y\left(\frac{\pi}{4}\right) > y\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, поэтому наибольшее значение функции на отрезке равно 4.

Ответ: 4.

15. ***Текстовые задачи***.

Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.

Решение.

Пусть цена холодильника ежегодно снижалась на p процентов в год. Тогда за два года она снизилась на $(1-0{,}01p)^2$, откуда имеем:

$$20000(1-0{,}01p)^2 = 15842 \Leftrightarrow (1-0{,}01p)^2 = 0{,}7921 \Leftrightarrow$$

$$\underset{1-0{,}01p>0}{\Leftrightarrow} 1-0{,}01p = 0{,}89 \Leftrightarrow p = 11.$$

Ответ: 11.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

Для записи решений и ответов на задания 16-21 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (16,17 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

16. ***<u>Уравнения, системы уравнений</u>***

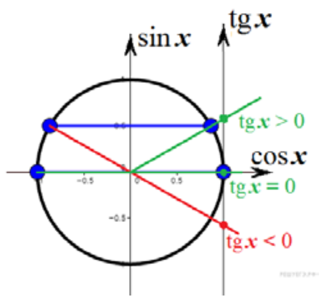
а) Решите уравнение $\left(2\cos^2 x+\sin x-2\right)\sqrt{5\operatorname{tg} x} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Получаем:

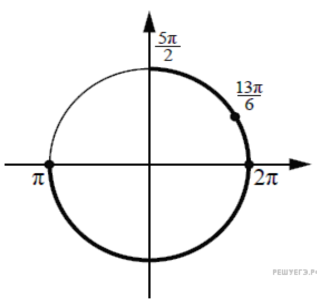
$$\left(2\cos^2 x+\sin x-2\right)\sqrt{5\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0, \\ \begin{cases} \operatorname{tg} x \ge 0, \\ 2\cos^2 x+\sin x-2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0, \\ \begin{cases} \operatorname{tg} x \ge 0, \\ \sin x - 2\sin^2 x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0, \\ \begin{cases} \operatorname{tg} x \ge 0, \\ \sin x(1-2\sin x) = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

откуда $x = \pi k$ или $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



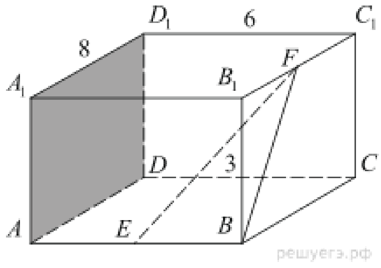
Получаем π, 2π и $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\pi k,\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\pi;\ 2\pi;\ \frac{13\pi}{6}$.

17. ***<u>Углы и расстояния в пространстве</u>***

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого AA_1 =3, AD = 8, AB = 6, найдите угол между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины рёбер AB и B_1C_1.

Решение.



Найдём угол между прямой EF и плоскостью BCC_1, которая параллельна плоскости ADD_1. Точка B — проекция точки E на эту плоскость. Искомый угол равен углу $EFB.$ Найдём тангенс угла EFB :

$$BE = \frac{6}{2} = 3, \quad B_1F = \frac{8}{2} = 4, \quad FB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\operatorname{tg} \angle EFB = \frac{BE}{BF} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{3}{5}$.

<u>18. Неравенства, системы неравенств.</u>

Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_{x+1}(2x-5) + \log_{2x-5}(x+1) \le 2, \\ 25^x - 20^x - 2 \cdot 16^x \le 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство: $\log_{x+1}(2x-5) + \dfrac{1}{\log_{x+1}(2x-5)} \le 2.$

Сделаем замену $y = \log_{x+1}(2x-5)$:

$$y + \frac{1}{y} \le 2; \frac{(y-1)^2}{y} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < 0, \\ y = 1. \end{array} \right.$$

Если $\log_{x+1}(2x-5) = 1$, то

$$\begin{cases} x+1 = 2x-5, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Если $\log_{x+1}(2x-5) < 0$, то

$$\begin{cases} \dfrac{2x-5-1}{x+1-1} < 0, \\ x+1 > 0, \\ 2x-5 > 0, \\ x = 1 \ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{x} < 0, \\ x > \dfrac{5}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < 3.$$

Решение первого неравенства: $\frac{5}{2} < x < 3$ или $x = 6$.

Решим второе неравенство. Разделим обе части на 16^x :

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{4}\right)^{x} - 2 \le 0.$$

Сделаем замену $z = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Получаем: $z^2 - z - 2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le z \le 2.$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\left(\frac{5}{4}\right)^x \le 2 \Leftrightarrow x \le \log_{1,25} 2.$

Решение второго неравенства: $x \le \log_{1,25} 2.$

Пересечём полученные решения. Учитывая, что $3 < \log_{\frac{5}{4}} 2 < 6$, находим множество решений системы: $\left(\frac{5}{2};\ 3\right)$.

Ответ: $\left(\frac{5}{2};\ 3\right)$.

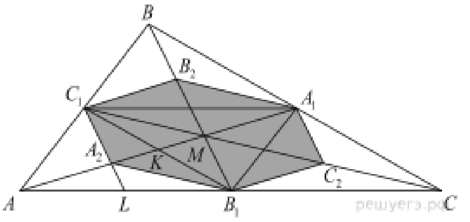
19. Планиметрические задачи

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

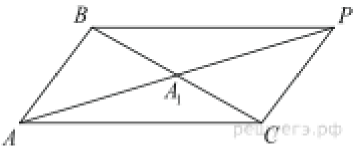
Решение.



а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB, поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1, у этих треугольников общая: $S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_1}$.

Аналогично получаем ещё 5 равенств:

$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}$, $S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}$, $S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}$, $S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2}$ и $S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}$.



Складывая эти равенства почленно, получаем $S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}$.

б) Обозначим длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC через a, b, c.

Докажем, формулу для квадрата медианы $AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон: $2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2$, откуда $AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Аналогично доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$. Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM, значит, $C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1$.

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника

$$ABC : B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1,\ A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1.$$

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) = \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC, получаем $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

20. Уравнения, неравенства и их системы с параметрами

Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

Решение.

Чтобы наибольшее значение данной функции было не меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы она в какой-то точке приняла значение 1. В самом деле, $f(a) = -a^2 < 1.$ Если наибольшее значение ее не меньше единицы, то по непрерывности в какой-то точке будет значение единица. Если же наибольшее значение меньше единицы, то значение единица приниматься не может. Итак, задача свелась к такой — при каких a есть корни у уравнения $|x-a| = x^2+1.$ Поскольку $x^2+1>0,$ это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x-a=x^2+1, \\ a-x=x^2+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+1+a=0, \\ x^2+x+1-a=0. \end{array}\right.$$

Эта совокупность имеет решения если $1-4(1+a)\geq 0$ или если $1-4(1-a)\geq 0,$ то есть при $a\leq -\dfrac{3}{4}$ или $a\geq \dfrac{3}{4}.$

Ответ: $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{3}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3}{4};\ \infty\right).$

<u>21. Числа и их свойства.</u>

Даны *n* различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n\geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение *n*, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения *n*, если сумма всех данных чисел равна 123.

Решение.

а) Да, может. Числа 2, 3, 4, 5 составляют арифметическую прогрессию, их сумма равна 14.

б) Пусть a — первый член, d — разность, n — число членов прогрессии, тогда их сумма равна $\dfrac{2a+d(n-1)}{2}n.$ Чтобы количество членов было наибольшим, первый член и разность должны быть наименьшими. Пусть они равны 1, тогда по условию $\dfrac{n(n+1)}{2}<900.$ Наибольшее натуральное решение этого неравенства $n = 41$. Такой результат получается при прогрессии $1+2+\ldots+41=861.$

в) Для суммы членов арифметической прогрессии имеем:

$$\frac{2a+d(n-1)}{2}n=123 \Leftrightarrow (2a+d(n-1))n=2\cdot 3\cdot 41.$$

Таким образом, число членов прогрессии n является делителем числа 246. Если $n\geq 41,$ то левая часть больше 246: $(2a+d(n-1))n\geq 42\cdot 41>246,$ следовательно, $n<41.$ Поскольку $n\geq 3,$ получаем, что $n=3$ или $n=6.$ Прогрессии из трёх и шести членов с суммой 123 существуют: например, 40, 41, 42 и 3, 10, 17, 24, 31, 38.

Ответ: а) да; б) 41; в) 3; 6.